UNE ÉQUATION DU 5ème DEGRÉ

APE Tale S (Approfondissement)

Soit P un polynome de dégré 5 défini par :
$P(x)=x^5-(\sqrt{2}+1)x^4+(\sqrt{2}-274)x^3+(274\sqrt{2}-546)x^2+(546\sqrt{2}-540)x+540\sqrt{2}$

Partie 1 : Calculs numériques sans calculatrice.

Donner un ordre de grandeur de $P(0); P(1); P(10); P(-10)$

On cherche à résoudre l'équation $P(x)=0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.

Partie 2 : DANS $\mathbb{R}$

A. Existence d'une solution

1. Construire la réprésentation graphique de P .
   Conjecturer l'existence d'une solution réelle.
2. Calculer la limite de P en $-\infty$ et $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une solution réelle.
3. Déterminer avec votre calculatrice la valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution réelle.
4. Calculer à la calculatrice la valeur approchée de $\sqrt{2}$.
   Peut-on en deduire que $\sqrt{2}$ est une solution de l'équation $P(x)=0$?
5. Montrer que $\sqrt{2}$ est une solution de l'équation $P(x)=0$.

B. Factorisation de P .

1. On admet qu'un polynôme admettant a comme racine se factorise par $(x-a)$.
   Ainsi, il existe Q un polynôme tel que $P(x)=(x-a)\times Q(x)$.
   Quel est le degré de Q . Justifier votre réponse.
2. Déterminer l'expression de $Q(x)$.
   En déduire la factorisation de P .

C. Existence d'une solution à l'équation $Q(x)=0$.

1. Calculer la limite de Q en $-\infty$ et $+\infty$.
   Peut-on en déduire que l'équation $Q(x)=0$ admet une solution ?
2. Construire la réprésentation graphique de Q sur [-20;20].
   Conjecturer l'existence de deux solution réelles à l'équation $Q(x)=0$.
   (RQ : On pourrait aussi conjecturer l'existence de ces solutions à partir de la représentation graphique de P sur [-20;20].)
3. Conjecturer les valeurs des solutions réelles de l'équation $Q(x)=0$.
4. Démontrer que les valeurs conjecturées au C.3 sont bien solution de $Q(x)=0$.

D. Factorisation de Q puis de P et résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x)=0$.

1. Factoriser Q , en déduire la factorisation de P .
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

Partie 3 : DANS $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(x)=0$, en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.